Grafos Planares

Definição: Um grafo é plano se pode ser desenhado numa superfície plana sem que haja cruzamento de arestas. G é planar se G for isomorfo a um grafo plano.

H (K4)

H é planar

(não é plano)

Plano e planar

Importância:

1. Grafos planares são esparsos (poucas arestas) mas são conexos.
2. Diversos problemas NP podem ser simplificados em grafos planares.

Engenharias:

projetos linhas férreas/metrô, transmissão, encanamento...

circuitos impresso (VLSI)

Objetivo: Como caracterizar grafos planares? Dado G, ele é planar?

# Curvas de Jordan

Definição: Toda curva fechada que não intercepta a si própria.

Teorema: Se C é curva de Jordan com e então qualquer curva que uma x a y intercepta C.

Teorema: O grafo completo K5 não é planar.

Assuma K5 planar e veja que isso é impossível.

V1

V2

V3

V4

V5

C = V1V2V3V1 (Curva de Jordan)

V1

V4

V2

V3

Com V4 temos

C1 = V1V2V4V1

C2 = V2V3V4V2

C3 = V1V3V4V1

Opções para V5:

Portanto, K5 não é planar.

Teorema: O grafo bipartido K3,3 não é planar.

Obs: Utility problem

Fórmula de Euler: Seja G plano e conexo. Então cujo , , .

Obs: Propriedade: Se G é planar então . Ele é esparso.

### Teorema de Kuratowski (1930)

Como determinar se G é planar ou não através de 3 operações:

1. Remoção arestas
2. Redução de séries
3. Remoção de vértices

Def: Redução de série (arestas)

V

V1

V2

d(v)=2

V1

V2

e

e1

e2

Def: Grafos Homeomorfos

G1 e G2 são homeomorfos se puderem ser reduzidos a grafos isomorfos a partir de redução de série.

Teorema de Kuratowski: Um grafo G é planar se e somente se não tiver um subgrafo homeomorfo a K5 ou K3,3.

Extra:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Planarity>

<https://en.wikipedia.org/wiki/Planar_graph>

<https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_curve_theorem>

<http://w3.math.uminho.pt/~pedro/Aulas0506/Discreta/grafos/node7.html>

<https://en.wikipedia.org/wiki/Kuratowski%27s_theorem>